ECOLE SPECIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

**CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ECOLES SUPERIEURES
DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MECANIQUE-ELECTRICITE
DE TOPOGRAPHIE**

PREMIERE INTERROGATION DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

EXERCICE N° 1

On considère le déterminant, à éléments réels,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ \lambda^3 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2 & \lambda^3 & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & 1 \end{vmatrix} .$$

1) Si on désigne par K_1 , K_2 , K_3 et K_4 les vecteurs colonnes de Δ , expliciter, à l'aide de Δ , le déterminant $\det (K_1 + K_3 , K_2 , K_3 - K_1 , K_4)$

2) Calculer Δ .

EXERCICE N° 2

Soit m un nombre réel. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inégalité :

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} \geqslant m$$

On remarquera que $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = \left| 1 + \sqrt{x-1} \right|$

EXERCICE N° 3

Soit z un nombre complexe tel que $|z| \leqslant M$. Mettre $e^z - (1 + \frac{z}{n})^n$ sous la forme

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \lambda_{n,p} z^p \quad \text{avec } \lambda_{n,p} \geqslant 0 .$$

Quel résultat peut-on en déduire quand n tend vers l'infini en restant dans $\mathbb{N}^*$?

page 232 2/2 1992

E. S. T. P Première Interrogation

EXERCICE N° 4

Soit u_1 et u_2 deux endomorphismes d'un espace vectoriel tels que $u_1^2 = u_2^2 = Id$ (involutions ou symétries) et que $Ker(u_1 - Id) = Ker(u_2 - Id)$. On posera $v = u_2 \circ u_1 - Id$.

1) Exprimer v comme combinaison linéaire de u_1 et u_2 (on pourra par exemple comparer $Im(u_1 + Id)$ et $Ker(u_2 - Id)$).

2) Applications indépendantes :

a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $u_2 \circ u_1 = u_1 \circ u_2$.

b) Calculer v^2.

c) Justifier l'existence de la restriction de v à $Ker(u_1 - Id)$ et la calculer.

EXERCICE N° 5

1) Tracer dans un repère orthonormé la courbe définie en coordonnées polaires par l'égalité

$\rho = \sin^2\theta\,[\sin\theta + \sin 2\theta]$

pour $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ (on se limitera aux inégalités $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{3}{2}$).

2) Calculer l'aire ainsi définie.

EXERCICE N° 6

Soit $a = \cos\frac{2\pi}{5}$. Dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le pentagone étoilé régulier $(A_0\,A_1\,A_2\,A_3\,A_4)$ dont les sommets appartiennent au cercle C d'équation $x^2 + y^2 = a^2$ et tels que $(\vec{i}, \overrightarrow{OA_k}) = \frac{4\pi}{5}.k$. On posera $A_5 = A_0$.

1) Pour k entre 0 et 4 , on note Γ_k l'arc du cercle circonscrit au triangle $OA_k\,A_{k+1}$ défini par $x^2 + y^2 \geqslant a^2$. Donner l'allure de la réunion Γ des Γ_k .

2) Donner une équation polaire $\rho = f(\theta)$ de l'arc Γ_0 pour $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{4\pi}{5}$ par rapport au repère de pôle O et d'axe polaire $\vec{i}$.

3) Même problème pour Γ et $0 \leqslant \theta \leqslant 4\pi$ (on pourra distinguer selon la valeur de θ).

4) Posant $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$, trouver les points communs à Γ et à la droite d'équation $(x = y)$ sous la forme $\overrightarrow{OM_i} = (\cos\varphi_i)\,\vec{u}$, $0 \leqslant \varphi_i \leqslant \pi$.

5) Développer en série de Fourier la fonction F de période $\frac{4\pi}{5}$ coïncidant avec f entre 0 et $\frac{4\pi}{5}$.